Equations différentielles non linéaires

I. Equation différentielle non linéaire d'ordre 1

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f:U\to\mathbb{R}$ continue. On étudie l'équation différentielle $E: y'=f(x,y)$.

1°) Solution

Déf : On appelle solution sur I de E toute fonction $y:I\to\mathbb{R}$ dérivable vérifiant :
1) $\forall x\in I,(x,y(x))\in U$,
2) $\forall x\in I, y'(x)=f(x,y(x))$.

Déf : Une solution de E est dite maximale ssi elle ne peut pas être prolongée en une solution sur un intervalle plus grand.

Prop : Si y est solution sur I de l'équation différentielle E alors pour tout $J\subset I$ non singulier la restriction $y_{|J}$ est solution sur J de E.

Déf : Le graphe d'une solution maximale de E est appelé courbe intégrale de E.

Prop : Les courbes intégrales de E sont tangentes en tout point au champ de vecteurs $(x,y)\mapsto\vec{u}(1,f(x,y))$

2°) Problème de Cauchy

Déf : Soit $(x_0,y_0)\in U$, le problème de Cauchy consiste à déterminer les solutions de l'équation $y'=f(x,y)$ satisfaisant la condition initiale : $y(x_0)=y_0$.

3°) Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout couple $(x_0,y_0)\in U$, le problème de Cauchy $\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ possède une solution maximale unique.

De plus celle-ci est définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et toute autre solution de ce problème de Cauchy est restriction de cette solution maximale.

Cor : Si deux solutions y et z sur I et J de l'équation différentielle $y'=f(x,y)$ vérifient $y(x_0)=z(x_0)$ alors y et z coïncident sur $I\cap J$.

Cor : Les graphes des solutions maximales de l'équation différentielle $y'=f(x,y)$ constituent une partition de U.

4°) Etude qualitative

lemme :

Soit y une solution sur $I=]a,b[$ de l'équation $y'=f(x,y)$.

Si y admet une limite finie y_b en b et si $(b,y_b)\in U$ alors on peut prolonger y en une solution sur $]a,b]$ et donc y n'est pas une solution maximale.

5°) Equations à variables séparables

Déf : Une équation différentielle à variables séparables est une équation de la forme : $a(x)b(y)+c(x)d(y)y'=0$ avec a,b,c,d fonctions continues.

Pour résoudre une telle équation et sous réserve :

$$a(x)b(y)+c(x)d(y)y'=0\Leftrightarrow\frac{d(y)}{b(y)}y'=-\frac{a(x)}{b(x)}\Leftrightarrow p(y)y'=q(x)$$

Pour P et Q primitives de p et q, on obtient : $P(y)=Q(x)+C$ avec $C\in\mathbb{R}$.

Ceci fournit des équations cartésiennes vérifiées par les courbes intégrales.

Si, de plus, on peut inverser P, on peut conclure $y=P^{-1}(Q(x)+C)$.

II. Equations différentielles autonomes

1°) L'équation autonome $y' = f(y)$

Soit J un intervalle ouvert, $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue et E l'équation autonome $y' = f(y)$.

Prop : Si y est solution sur I de E alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $\tau_a y : t \mapsto y(t-a)$ est solution de E sur l'intervalle $a + I$.
Graphiquement : champ de vecteurs invariant par translation

Théorème : Cauchy-Lipschitz
Soit J un intervalle ouvert et $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout $y_0 \in J$, le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ possède une solution maximale unique.
De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert et tout autre solution de ce problème de Cauchy est restriction de cette solution maximale.

Cor : Si y_0 est une valeur d'annulation de f alors la fonction constante égale à y_0 est solution de E sur $\mathbb{R}$ et les seules autres solutions prenant la valeur y_0 en sont les restrictions.

2°) Le système autonome $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$

a) définition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f, g : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Déf : On appelle solution sur I du système $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ tout couple (x,y) formé de fonctions dérivables sur I vérifiant :
1) $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in U$,
2) $\forall t \in I, x'(t) = f(x(t), y(t))$ et $y'(t) = g(x(t), y(t))$.

Déf : Une solution de S est dite maximale ssi elle ne peut pas être prolongée sur un intervalle plus grand en une fonction qui soit encore solution de S.

Prop : Si (x,y) est solution sur I de S alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(\tau_a x, \tau_a y)$ est solution sur $a + I$ de E.

Déf : Si (x,y) est solution de S alors la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ est appelée ligne de champs du système différentiel S.

Prop : En tout point régulier, une ligne de champ est tangente au champ de vecteurs $(x,y) \mapsto \vec{u}(f(x,y), g(x,y))$.

b) problème de Cauchy

Déf : Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$. Le problème de Cauchy consiste à déterminer les solutions de S vérifiant la condition initiale : $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors le problème de Cauchy possède une unique solution maximale.
De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert et tout autre solution de ce problème de Cauchy en est une restriction.

Cor : Les solutions maximales du système sont ou bien injectives, ou bien périodiques.

3°) L'équation autonome $x'' = f(x, x')$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ et E l'équation différentielle $x'' = f(x, x')$.

a) définition

Déf : On appelle solution sur I de E toute fonction $x : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et vérifiant :
1) $\forall t \in I, (x(t), x'(t)) \in U$,
2) $\forall t \in I, x''(t) = f(x(t), x'(t))$.

Déf : Une solution de E est dite maximale ssi elle ne peut être prolongée en une solution sur un intervalle plus grand.

Prop : Si y est solution de E sur I alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a y$ est solution de E sur $a+I$.

lemme :

On a équivalence entre :

(i) x est solution de E sur I,

(ii) x est le premier élément d'un couple solution du système $\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x,y) \end{cases}$.

Déf : Si x est solution de E la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = x'(t) \end{cases}$ est appelée ligne de phase de E.

Prop : En tout point régulier, une ligne de phase de E est tangente au champ de vecteur $(x,y) \mapsto \vec{u}(y, f(x,y))$.

b) problème de Cauchy

Déf : Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_0, x_1) \in U$. Le problème de Cauchy consiste à déterminer les solutions de E vérifiant les conditions initiales : $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_1$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors pour tout $(x_0, x_1) \in U$, il existe une unique solution maximale à l'équation E vérifiant $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_1$.

De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert et tout autre solution de ce problème de Cauchy en est une restriction.

Cor : Si x est une solution maximale E telle qu'il existe $t_0 < t_1$ pour lesquels $\begin{cases} x(t_0) = x(t_1) \\ x'(t_0) = x'(t_1) \end{cases}$ alors x est $T = t_1 - t_0$ périodique.